EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….093**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $5-i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,1,1)$ la planul $x+y+z-4=0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=2$ în punctul $P(1,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,3)$**,** $M(2,4)$ și $N(3,5)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$**,** $B(1,2,1)$**,** $C(2,1,1)$ și $D(1,1,1)$.

(2p) **f)** Să se calculeze produsul $(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ)\ldots(\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie aritmetică primul termen este 3 și rația este 3 , să se calculeze termenul al cincilea .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n^2 < 2n+3$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+x+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $log_3(x^2+5)=2$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^3+3X-4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=arctgx$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M_2(\mathbf{Z_3})$, submulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbf{Z_3})\ \middle|\ X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $O_2\in G$ şi $I_2\in G$.

(4p) **b)** Să se verifice că dacă $\hat{x},\hat{y}\in\mathbf{Z_3}$, atunci $\hat{x}^2+\hat{y}^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $P,Q\in G$, atunci $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G$.

(2p) **d)** Să se rezolve în mulțimea G ecuația $X^2=I_2$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de elemente din mulțimea G.

(2p) **f)** Să se arate că pentru orice matrice $A\in G$, $A\neq O_2$, există o matrice $B\in G$, astfel încât $A\cdot B=B\cdot A=I_2$.

(2p) **g)** Să se arate că produsul tuturor matricelor diferite de O_2 din mulțimea G, nu depinde de ordinea factorilor şi să se calculeze acest produs.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $g_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite prin $f_0(x)=1$ şi $g_0(x)=e^x$, respectiv $f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n(t)dt$ şi $g_{n+1}(x)=1+\int_0^x g_n(t)dt$, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_1(x)=1+x$ şi $g_1(x)=e^x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_2(x)$ şi $g_2(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(2p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ şi $g_n(x)=e^x$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **d)** Să se scrie ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției g_0.

(2p) **e)** Să se arate că $0\le g_n(x)-f_n(x)\le e^x\cdot\frac{x^n}{n!}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\forall x>0$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$, $\forall x>0$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$, $\forall x>0$.